

论粗粒料的 $E-\mu$ 模型

郭见杨 黄胜生 喻小生

On $E-\mu$ Model of Big Granular Media

Guo Jianyang Huang Shengsheng Yu Xiaosheng

Abstract

Based on the large-scale triaxial experimental results, some troubles in the $E-\mu$ model for big granular media widely used in our country are analysed. It is indicated that the relationship used in the model $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R(\sigma_1 - \sigma_3)_{u_1}$ is unnecessary and the semilogarithmic relationship between u_1 and σ_3 is not unique.

In order to improve this model, a more convenient formula is suggested.

提 要

本文在大三轴试验成果基础上,对在我国广泛采用的粗粒材料的 $E-\mu$ 模型存在的问题进行了分析。指出,模型中采用 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R(\sigma_1 - \sigma_3)_{u_1}$ 的关系是多余的,反而给计算带来误差,模型中 u_1 和 σ_3 成半对数关系也不是唯一的。

为了完善这个模型,作者建议了更适用的关系式。

本文根据试验资料,论证国内有限元计算中常用的 $E-\mu$ 模型的假定条件是否成立。这个 $E-\mu$ 模型有人称之为邓肯-张模型,亦有人简称为邓肯模型。我们的试验资料系前几年结合生产任务,在边工作边学习的情况下取得的,而且由于对每种材料仅作过一次试验,没有进行平行对比,故文中数据自有不足之处。但因试验数量充足,所反映的现象有一定的规律,结论还是有一定的可靠性。

目前,国内关于 $E-\mu$ 模型的试验讨论,对粘、砂等细粒土的多,而涉及砾、卵等粗粒土的少。加之粗粒土试验用料太多,每组试料重达1000公斤,积累这方面的资料实属不易。因此,对该模型是否适用于粗粒料,实有探讨的必要。

本文基于试验资料着重讨论模型公式的函数关系,有关该公式及参数的物理意义等请参看文献[1~3],恕不赘述。

一、公式推导

邓肯-张-库哈维(Duncan-Chang-Kulhawy)等人提出的 $E-\mu$ 模型,其前提和假定条件的数学表达式可归结为:

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = e_1 / (a + be_1) \quad (1)$$

$$1/a = E_1 = K \cdot P(\sigma_3/P)^n \quad (2)$$

$$R = b \cdot q_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{u1}} \quad (3)$$

$$q_f = (2\sigma_3 \sin\varphi + 2C \cos\varphi) / (1 - \sin\varphi) \quad (4)$$

$$e_1 = e_s / (f + De_s) \text{ 或 } e_s = f \cdot e_1 / (1 - De_1) \quad (5)$$

$$f = \mu_1 = G - F \log(\sigma_3/P) \quad (6)$$

定义 E 、 μ 为切线模量和切线泊松比。对式(1)求导, 再将式(1)~(4)代入得式(7); 对式(5)求导, 然后将式(1)~(6)代入得式(8);

$$\begin{aligned} E = \frac{\partial q}{\partial e_1} &= \frac{\partial}{\partial e_1} \frac{e_1}{a + be_1} = \frac{a}{(a + be_1)^2} = \frac{1}{a} (1 - b \cdot q)^2 \\ &= K \cdot P \left(\frac{\sigma_3}{P} \right)^n \left[1 - \frac{(1 - \sin\varphi) q \cdot R}{2\sigma_3 \sin\varphi + 2C \cos\varphi} \right]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu = \frac{\partial e_s}{\partial e_1} = \frac{\partial}{\partial e_1} \frac{f \cdot e_1}{1 - De_1} = \frac{f}{(1 - De_1)^2} = \frac{G - F \lg \frac{\sigma_3}{P}}{(1 - A)^2} \quad (8)$$

式中

$$A = \frac{D \cdot q}{K \cdot P(\sigma_3/P)^n \left[1 - \frac{(1 - \sin\varphi) q \cdot R}{2\sigma_3 \sin\varphi + 2C \cos\varphi} \right]}$$

a 、 b 、 f 为试验所得的三个变参数(随 σ_3 的变化而变化), q 为剪应力, q_f 为剪破时剪应力(即式(4)), q_{u1} 为双曲线极限剪应力(即 $q_{u1} = 1/b$), E_1 和 μ_1 为初始切线模量和初始切线泊松比(即 $E_1 = \frac{1}{a}$, $\mu_1 = f$), K (模量纯数)、 n (模量指数)、 R (破坏比)、 C (粘聚力)、 φ (内摩擦角)以及 G 、 F 和 D 为八个试验常参数(不随 σ_3 的变化而变化), 从试验资料按上述公式整理即可求得。式中 P 为大气压力, 一般取 $P = 1.0$ 公斤/厘米², 主要为消除式中应力的单位, 使量纲合理。

由此可见, E - μ 模型的数学表达式主要是(7)和(8)式, 而它能否适用于粗粒料, 关键在于其前提和假定的条件, 即(1)~(6)式是否合理。

二、对(7)式的前提和假定条件的讨论

根据15组粗粒材料的试验结果, 对(7)式的前提和假定条件(1)~(3)式讨论如下(关于4式, 它是摩尔库仑极限平衡条件, 论述已很多, 本文不再重复)。

15组粗粒材料的特征如表1所示。

(一) 关于式(1)

将 $q \sim e_1$ 的双曲线关系表达式(1)改写成直线关系, 即 $e_1/q = a + be_1$ 。两边同时除以 e_1 (e_1 为破坏时的轴向应变), 仍为直线关系。15组粗粒材料60多条试验曲线基本符合这种关系, 说明式(1)的规律是存在的。图1是其中部分资料成果, 但亦常出现

表1

材料特征表

编号	名称	成因和颗粒形状	颗粒尺寸 (mm)	干容重	试验方法
1	矿渣	即一般矿渣	> 1 的占32%	1.14g/cc	不饱水固结不排水剪
2	粒状材料	水泥制成, 球形	1~20的98%	1.50	同上
3	矿渣	即一般矿渣	1~3的80%	0.95	同上
4	粒状材料	水泥制成, 球形	5~20的87%	1.68	同上
5	粒状材料	同上	5~40的87%	1.66	同上
6	似矿渣料	水泥制成, 似矿渣	5~40的84%	1.33	同上
7	似矿渣料	同上	10~70的82%	1.11	同上
8	砂卵石	河成砂卵石	以0.1~40的为主	1.72	饱水固结排水剪
9	卵石	同上	以5~80的为主		同上
10	土夹碎石	残坡积	> 1 的44%		同1号
11	土夹碎石	同上	同上		同1号
12	碎石夹土	同上	> 1 的73%		同8号
13	风化石渣	人工开挖碎石	5~60的96%		同8号
14	半新鲜石渣	同上	5~60的92%		同8号
15	混土石渣	同上	5~60的77%		同8号

$q \sim e_1$ 关系线的初始端, 甚至末端偏离双曲线的现象。可以这样来理解: 试验刚开始时, 各种误差 (例如试样本身缺陷的克服, 仪器各部件接触上的调正等) 往往表现得十分明显; 而在较高剪应力水平时, 试样内部各点进入极限平衡状态又很难同步, 因而在 $q \sim e_1$ 关系曲线的初始端或两端偏离双曲线。我们采用舍弃初始端或两端, 取其多数试验点连线的原则来处理。多数情况在剪应力水平 $S \geq 0.5$ 范围内 (当然不包括 $S > 1.0$) 的试验点均落在双曲线关系线上。

邓肯对细粒土试验亦遇到类似现象, 他认为只有在 $S = 0.7 \sim 0.95$ 之间, $q \sim e_1$ 才符合双曲线。

(二) 关于式(2)

这批试验资料表明, $\frac{1}{a} \sim \sigma_3$ 关系基本符合式(2)的指数规律。

目前, 有部份同志对式(2)持不同看法, 因为在计算中, 当 σ_3 很小时, 得不

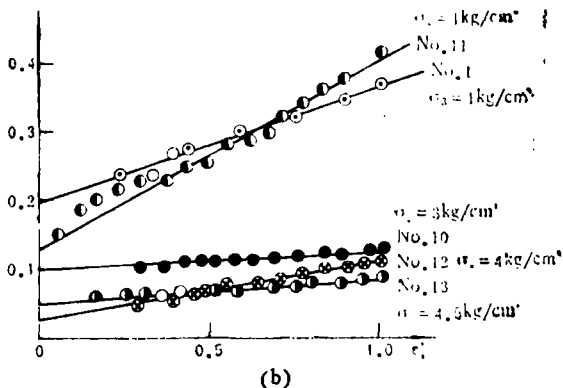
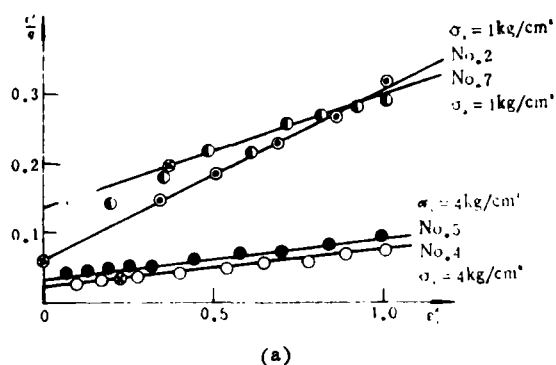


图1 $\frac{e_1}{q} \times \frac{1}{e_1 f} \sim e_1 \times \frac{1}{e_1 f}$ 关系图

(⊙相当于应力水平 $q/q_f = 0.5$ 的点)

出合理的结果。

在讨论这个问题以前, 让我们来看一个实例。湖北某土石坝, 坝高50米。坝壳采用碎石土, 材料特征见表1中编号10、11、12; $E-\mu$ 模型参数见表6中相应的编号。在用有限元计算时, 分级加荷的最初级 σ_3 取 σ_0 , σ_0 值不同, 坝顶沉降总值 S 亦不一样, 结果归纳于表2。

表2

σ (kg/cm ²)	不同 σ_3 下坝顶沉降计算值			坝顶沉降参考值
	0	0.5	1.0	
$S=S_1+S_2$ (m)	很 大	8.8	5.5	$S_1=2.1$ (m) $S_2=0.7$ (m) $S=2.8$ (m)

表中 S 、 S_1 、 S_2 分别为总的、施工期的、竣工后(至1981年的)沉降值。 S_2 为实测值, S_1 按 $S_1/(S_1+S_2)=0.7$ 反算求得。表中参考值系自实测和经验换算而得, 大体上是可以信赖的, 故以它为标准。从表2可知, 计算时 σ_0 取值过小, 从式(2)可知 σ_3 小了 E 亦很小, 这就必然得出很大的沉降值。当然 σ_0 不能任意选取, 在计算沉降时, 它应该是沉降发展过程的最初瞬间土中实际的 σ_3 值。土石坝夯实后使坝身材料具有很大的固结压力, 这一点必须考虑。从表2看出, 该坝 σ_0 应大于1.0, 可能为1.5~2.0公斤/厘米²。又例如砌置深度为2米的基础, 地基中 σ_3 最小值应等于2米深处有效周围压力。假若是超固结土, σ_3 的最小值可能更大, σ_0 应相当于先期固结压力。

我们认为, 目前 σ_3 最小值不符合实际情况, 可能是计算结果不合理的原因之一, 不一定是式(2)所引起的, 最好进行先期固结压力试验, 以确定 σ_0 值。至于公式(2)本身, 当 σ_3 很小, 小到零甚至为负值时, 式(2)是不成立的。

(三) 关于式(3)

在 $E-\mu$ 模型中破坏比 R 是个常数, 但15组粗粒材料试验表明, 它往往变化明显, 故不得不取其平均值(见表3)。

表8

破坏比 R 的计算值

组号	不同 σ_3 下实际破坏比 $R_{(n)}$								$R_{(n)}$ 的平均值 $R_{(c)}$	最大差值 $R'_{(n)} - R_{(c)}$ $=t'$
	$\sigma_3=2.1$	$\sigma_3=2.0$	$\sigma_3=2.5$	$\sigma_3=3.0$	$\sigma_3=3.5$	$\sigma_3=4.0$	$\sigma_3=4.5$	$\sigma_3=5.0$		
1	0.488	0.666		0.647		0.686		0.555	0.584	-0.097
2	0.685	0.843		0.738		0.746		0.406	0.683	-0.272
3	0.710	0.716		0.709		0.812		0.741	0.738	0.074
4	0.855	0.758		0.655		0.682		0.644	0.718	0.132
5	0.787	0.913		0.868		0.932		1.000	0.900	-0.113
6	0.653	0.607		0.552		0.645		0.614	0.614	-0.063
7	0.686	0.714		0.821		0.644		0.683	0.710	0.112
10	0.544	0.739		0.327	0.325				0.484	-0.159
11	0.817	0.272		0.429	0.312				0.458	0.359
12	0.720	0.643		0.617		0.577			0.639	0.081
13	0.731		0.590				0.463		0.584	0.147
14	0.806			0.677			0.607		0.697	0.109
15	0.679		0.729				0.607		0.672	-0.065

令在不同 σ_3 下的破坏比 R 为 $R_{(n)}$, 其平均值为 $R_{(c)}$, 取 $R_{(n)}$ 和 $R_{(c)}$ 之差为 t , t 的最大绝对值为 t' . t' 值列表3中. 从表3可知, t' 值为0.1~0.2的占多数.

结合式(7)来分析, $t' = 0.1 \sim 0.2$ 的影响有时是不可忽视的. 假定分别用 $R_{(n)}$ 和 $R_{(c)}$ 按(7)式来计算 E , 并假定其它参数没有波动变化, 得出的 $E_{(n)}$ 和 $E_{(c)}$ 比值 x 如下

$$x = \frac{E_{(n)}}{E_{(c)}} = \frac{\frac{1}{a} \left[1 - \frac{q}{q_f} R_{(n)} \right]^2}{\frac{1}{a} \left[1 - \frac{q}{q_f} R_{(c)} \right]^2} = \left[1 - \frac{t'}{\frac{1}{S} - R_{(c)}} \right]^2 \quad (9)$$

式中 $S = q/q_f$, $t' = R_{(n)} - R_{(c)}$

从式(9)可知, 随着最大偏差 t' 、应力水平 S 和破坏比平均值 $R_{(c)}$ 的增大, x 偏离1.0的程度亦越大.

取应力水平为0.8, 算得各组材料的 x 值如表4所示. 可知 x 偏离1.0的达30%~40%以上, 这显然是式(3)的假定带来的较大误差.

表4

编 号	t'	$x = \frac{E_{(n)}}{E_{(c)}} = \left[1 - \frac{t'}{\frac{1}{S} - R_{(c)}} \right]^2$
1	-0.096	1.3
2	-0.278	2.2
3	-0.074	0.73
4	0.132	0.56
5	-0.113	1.75
6	-0.063	1.21
7	0.112	0.67
10	-0.159	1.45
11	0.359	0.30
12	0.081	0.75
13	0.147	0.61
14	0.109	0.64
15	-0.065	1.23

我们认为, 式(3)的提出是多余的(没有必要的). 因为式(3)说明, 若 R 是个常数, 则 b 必然是一个与 σ_3 有关的变参数, 并按一定的规律与 σ_3 发生关系. 将式(4)代入式(3)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{q_f}{R} = \frac{2C \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)R} + \frac{2 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)R} \sigma_3 \\ \text{令 } \frac{2C \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)R} &= H, \quad \frac{2 \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi)R} = \lambda, \\ \text{得 } \frac{1}{b} &= H + \lambda \sigma_3 \end{aligned} \quad (10)$$

因 C 、 φ 和 R 系常数, 故 H 、 λ 亦必然为常数. 在式(7)的建立过程中, 当推

导出 $E = \frac{1}{a}(1-bq)^2$ 以后, 若以式(10)代替式(3)代入, 则得

$$E = K \cdot P\left(\frac{\sigma_s}{P}\right)^* \left(1 - \frac{q}{H + \lambda\sigma_s}\right)^2 \quad (11)$$

土力学中任何一个参数要想求得其“真值”是困难的, 给定的值总是会有一定的误差。因此, 计算公式中参数越少, 带来的累积误差也越小。用式(11)代替式(7)的优点就在于此。

根据试验资料作出的 $e_s/q \sim e_s$ 关系曲线必然为直线, 其斜率就是 b , 求出 $1/b$ 值, 并作出它与 σ_s 的关系曲线, 按式(10)它也一定是直线。其在 $\frac{1}{b}$ 轴上的截距就是 H , 斜率就是 λ (图2)。

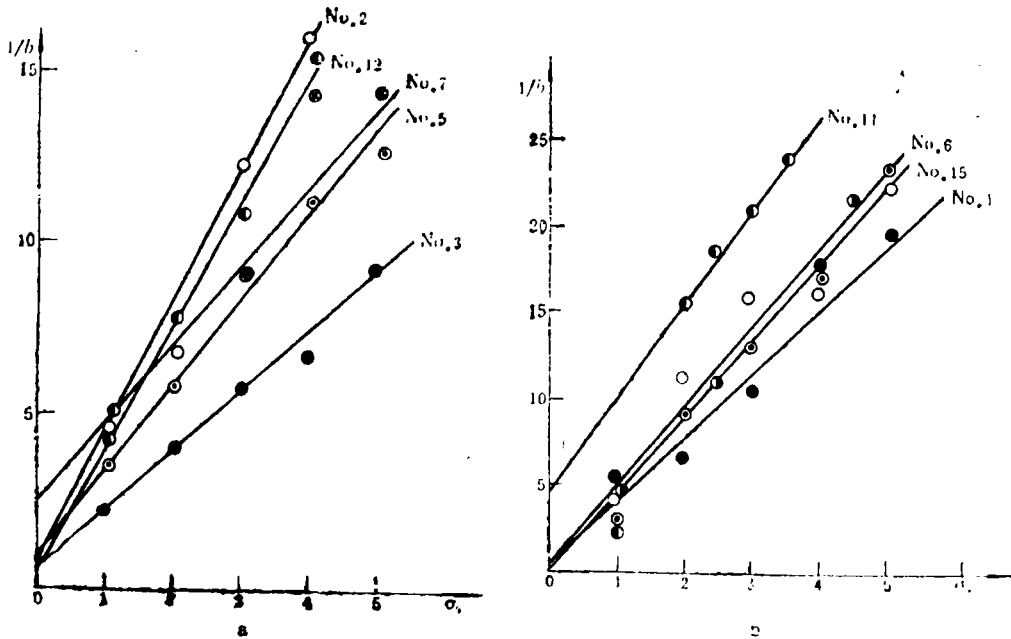


图2 $\frac{1}{b} \sim \sigma_s$ 关系图

试验所得 $1/b$ 数值列于表5。求得的 H 、 λ 列于表6。

表5 不同 σ_3 (kg/cm²) 下的极限剪应力 $\frac{1}{b}$

组号	$\frac{1}{b} = qul$							
	$\sigma_3 = 1.0$	$\sigma_3 = 2.0$	$\sigma_3 = 2.5$	$\sigma_3 = 3.0$	$\sigma_3 = 3.5$	$\sigma_3 = 4.0$	$\sigma_3 = 4.5$	$\sigma_3 = 5.0$
1	5.556	6.798		10.764		17.926		19.724
2	4.608	6.840		12.376		16.000		40.000
3	2.208	4.167		5.882		6.667		9.259
4	3.226	9.337		13.004		17.544		23.310
5	3.571	5.882		9.091		11.111		12.500
6	4.405	11.494		16.000		16.667		22.321
7	5.000	6.944		9.091		14.286		14.286
10	4.598	4.675		23.229	23.50			
11	2.772	15.555		21.008	23.98			
12	4.073	7.845		10.870		15.385		
13	4.483		10.98				25.000	
14	2.949			13.350			22.666	
15	4.347		11.11				21.740	

表6 15组粗粒料 $E-\mu$ 模型参数值

组号	C (kg/cm ²)	φ	R	K	n	H	λ
1	0.30	31° 47'	0.585	69.18	0.53	3.20	2.061
2	0.00	37° 35'	0.683	301.99	0.61	0.80	3.750
3	0.08	22° 35'	0.738	34.48	0.84	0.57	1.726
4	0.20	34° 0'	0.717	384.60	0.15	1.00	4.118
5	0.00	34° 36'	0.900	199.99	1.78	1.02	4.060
6	0.10	35° 22'	0.614	58.80	0.93	1.00	2.436
7	0.60	30° 34'	0.710	83.15	0.38	2.42	2.387
8	0.15	39° 0'	0.930	1000.00	0.47		
9	0.30	38° 0'	0.860	708.00	0.73		
10	0.25	28° 22'	0.484	38.09	0.50	0.00	10.050
11	0.10	29° 32'	0.458	55.60	0.85	1.90	3.794
12	0.30	29° 24'	0.639	94.40	0.59	0.57	3.570
13	0.30	32° 30'	0.584	83.33	0.46	0.00	6.818
14	0.00	39° 30'	0.697	85.11	0.10	0.00	5.500
15	0.12	34° 48'	0.672	72.99	1.12	0.00	4.489

三、关于式(8)的前提和假定条件讨论

从15组64个试样结果看, 假如说式(7)对粗粒料基本合适的话, 则式(8)对粗粒料的合适程度要差得多。资料整理情况如下:

(一) 关于式(5)

资料表明 $e_1 \sim e_3$ 关系同式(1)的 $q \sim e_1$ 一样, 在线段初始端有时甚至还在末端有偏离双曲线的试验点, 从而需用类似原则处理, 不过与式(1)不同的是, 这里的偏离段有时太长, 以致无法整理, 而且式(5)对粗粒料的适用性也不象式(1)那么好。

(二) 关于式(6)

从整理出的 $f \sim \sigma_3$ 关系曲线看, 有三种情况: (a) 符合式(6)规律; (b) 不同 σ_3 下 f 相差甚微, 即 f 与 σ_3 无关; (c) 不符合式(6)的规律, 其规律也不清楚。

总的来看式(6)的前提和假定条件对粗粒料是否合适还值得进一步研究。附带指出以下事实: 邓肯最早计算是取 $\mu = \text{const}^{(3)}$, 只是后来邓肯-库哈维模型才采用了式(8), 说明邓肯本人的观点前后也并不一致。殷家瑜等人的试验认为式(8)对砂土是不适用的⁽²⁾。我们试验中还有一个现象, 即对坚硬材料的无棱角磨圆颗粒往往剪胀现象明显, 此时 μ 大于 0.5 按式(8)来计算意义不大。

四、结 论

1. 计算 E 的公式的前提和假定条件对粗粒土基本合适, 但引入式(3)和(4)没有必要, 建议用式(11)代替式(7);

2. 在计算 μ 的公式的前提和假定条件中, 式(5)和式(6)对粗粒土的适用性值得进一步研究。

参 考 文 献

- (1) 黄文熙, 土的弹塑性应力~应变模型理论, 岩土力学, 1979年第1、2期。
- (2) 殷家瑜等, 高压下下尾矿砂的强度与变形特性, 岩土工程学报, 1980年第2期。
- (3) J.M. Duncan and chin-Yung Cnang., Nonlinear analysis of Stress and strain in soils Proceeding of the ASCE, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 96, No. 5 SM5, 1970.